コンパクト多様体上の接触変換群について (部分多様体と変分問題)

数理解析研究所講究録
154巻 1972年 46-58

コンパクト多様体上の接触変換群について．

都立大 理　大森英樹．

§1.　序．

S. Lie が連続群の研究を始めたのは．今から丁度百年程前であった。彼の目的としたものは．(イ)方程式のガロア理論に相当するものを微分方程式に関して建設すること。(ロ) 接触変換群の如き．多様体の上部構造を不変にする群の研究。であったと思われる。彼の研究は．その後．(a) 有限次元 Lie 群論．(b) 無限次元の pseudo transformation group の理論．となって発展したわけである。

こゝに於ける私の立場は．上記 (b) の理論を．filtered Lie algebra 等の研究によって代表されるように．Lie 理論だと見るという立場である。そうすれば．次の問題意識は自然に発生するであろう。即ち．「有限次元 Lie 群とほゞ同程度の取扱いができ．かつ．S. Lie や E. Cartan が研究した無限次元 Lie 群を．実例として持つような．位相群を．変換群の立場を離

れて抽象的に定義することができるか。」

この設問は、ほゞ肯定的に解決される。即ち、次章で定義するI.L.H.-Lie群の概念がそれである。I.L.H.-Lie群は、次のような実例を持っている。

(1) すべての有限次元Lie群.

(2) すべての無限次元Hilbert Lie群.

(3) Mを閉多様体とした時、MのC^∞-可微分同相写像の全体.

(4) MのC^∞ volume elementを保つC^∞可微分同相写像の全体.

(5) Mの任意のfoliationを保つC^∞-可微分同相写像の全体.

(6) Mを偶数次元とし、更にM上にC^∞ symplectic 2-formがあるものとして、C^∞-symplectic diffeomorphismの全体

(7) Mを奇数次元とし、更にM上にC^∞ contact 1-formがあるものとして、C^∞-contact diffeomorphismの全体.

(8) (7)と同じ条件下で、更に、characteristic vector fieldがS^1(円周)のfree actionを引き起しているとき、M上のstrictly contact diffeomorphismの全体。但し、Mは単連結とする。

上記の(1)〜(8)を全部例としているような、I.L.H. Lie群よりもっと強い条件をもったLie群の概念が存在するか否かについては不明であるが、少くとも、群演算の微分可能性に関する限り、これ以上良くはならない。その意味で、I.L.H.-Lie群の概念は、上の設問に対する、ぎりぎりいっぱいの答えで

ある。

では．I.L.H.-Lie群に於て．どの位有限次元Lie群と同じ事が成立するかというと．それはそう沢山はないのである。有限次元Lie群論で、基礎的な定理である陰函数定理もフロベニウスの定理もI.L.H.-Lie群では一般には成立しない。それ等は、いくつかのかなり強い条件（有限次元の時には．いつでも成立しているような条件）の下に証明されるのみである。

こゝでは．I.L.H.-Lie群中特に．(7), (8)であげた接触変換群を中心にして話を進める。特に．これに興味があるのは．次の理由による。(3), (4)であげたI.L.H.-Lie群をそれぞれ．$\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_{dv}$とすると．実は．$\mathcal{D}_{dv}$が$\mathcal{D}$の閉I.L.H.-部分群である。factor set $\mathcal{D}_{dv}\backslash\mathcal{D}$を考えると．これは．total volumeが1のvolume elementのなす空間と一致する。この集合は．位相的には可縮である．又．$\mathcal{D}_{dv}$が$\mathcal{D}$の閉I.L.H.-部分群となる事は．実は．$\mathcal{D}_{dv}$のLie環について．フロベニウスの定理を証明して得られるのだから．$\mathcal{D}$は$\mathcal{D}_{dv}\backslash\mathcal{D}$を底空間とし．$\mathcal{D}_{dv}$をfibreとするfibre bundleであることがわかる。$\mathcal{D}_{dv}\backslash\mathcal{D}$は可縮だから．このfibre bundleは実はtrivialで．$\mathcal{D}$は$\mathcal{D}_{dv}$とtotal volumeが1のvolume element全体の空間との直積にhomeomorphicとなる。これと同じような事が(7)と(8)でも云えるのであるまいかというのが興味の中心なのである。即ち．(7), (8)の群を

それぞれ、$\mathcal{D}_\omega$, $\mathcal{D}_{s\omega}$ としたとき、「$\mathcal{D}_\omega$ は、$\mathcal{D}_{s\omega}$ と $\mathcal{D}_{s\omega}\backslash\mathcal{D}_\omega$ の直積に homeomorphic ではあるまいか」という予想に興味を持つのである。

§2. I.L.H. Lie 群.

$N(d)$ を $m \geqq d$ なる整数全体の集合とする。線型位相空間の族 $\{\mathbb{E}, E^k, k\in N(d)\}$ が I.L.H.-system とは、(イ) 各 E^k は、separable Hilbert space, (ロ) E^{k+1} は E^k の中に、線型に、dence に imbed されている。(ハ) $\mathbb{E} = \cap E^k$ であり、$\mathbb{E}$ の位相は、$\{E^k\}$ からの inverse limit topology である。ときをいう。

位相群 G が I.L.H.-system $\{\mathbb{E}, E^k, k\in N(d)\}$ をモデルとする I.L.H.-Lie 群とは、G が次の(I)〜(VII)の条件を充たすことをいう。

(I) G の単位元 e の近傍 $\tilde{U}$ と、E^d の 0 の近傍 U と、$U\cap\mathbb{E}$ から $\tilde{U}$ の上への同位相写像 ξ で $\xi(0) = e$ となるものが存在する。

(II) E^d の 0 の近傍 V があって、$\xi(V\cap\mathbb{E})^2 \subset \xi(U\cap\mathbb{E})$, 及び、$\xi(V\cap\mathbb{E})^{-1} = \xi(V\cap\mathbb{E})$ が成立。

(III) $\eta(u,v) = \xi^{-1}(\xi(u)\xi(v))$ とすると、η は $V\cap E^{k+\ell}\times V\cap E^k$ から $U\cap E^k$ への C^ℓ 写像に拡張できる。但し、$\ell \geqq 0$, $k\in N(d)$。

(IV) v を固定し、$\eta_v(u) = \eta(u,v)$ とすると、η_v は、各 $v\in V\cap E^k$ に対して、$V\cap E^k$ から $U\cap E^k$ への C^∞ 写像になる。

(V) η_v の u に於ける微分 $(d\eta_v)_u w$ を $\Theta(w, u, v)$ とすると、Θ は、$E^{k+l} \times V\cap E^{k+l} \times V\cap E^k$ から E^k への C^l 写像に拡張可能。

(VI) $\iota : V\cap \mathbb{E} \mapsto V\cap \mathbb{E}$ を $\iota(u) = \xi^{-1}(\xi(u)^{-1})$ で定義すると、これは $V\cap E^k$ からそれ自身への連続写像に拡張可能。

(VII) G の元 g を任意に固定すると、それに対して、E^d の 0 の近傍 W が存在して、$g^{-1}\xi(W\cap\mathbb{E})g \subset \xi(U\cap\mathbb{E})$ となり、A_g を $A_g(u) = \xi^{-1}(g^{-1}\xi(u)g)$ とすると、これは、$W\cap E^k$ から $U\cap E^k$ への C^∞ 写像に拡張される。

$k\in N(d)$ を固定し、$\mathfrak{N}^k$ を E^k に於ける 0 の近傍系とする。但し、$\mathfrak{N}^k$ の各元 W は、$U\cap E^k$ の中に入っているものとする。

$\boxed{\text{Lemma}}$ $\{\xi(W\cap\mathbb{E}) ; W\in\mathfrak{N}^k\}$ なる e の近傍の族は、G に最初に入っている位相よりも弱い位相を定義し、それによって、G は再び位相群となる。

この弱い位相、$\{\xi(W\cap\mathbb{E}) ; W\in\mathfrak{N}^k\}$ できまる G 上の右一様位相により G を完備化したものを G^k と書く。G^k は無論位相群である。$\{G^k, k\in N(d)\}$ の性質は、次の定理で与えられる。

$\boxed{\text{定理}}$ $\{G^k, k\in N(d)\}$ は次の (G.1)〜(G.8) の性質を持つ。

(G.1) E^d の 0 の近傍 V_1 で $V_1\subset U$ となるものがあり、写像 $\xi : V_1\cap\mathbb{E} \longrightarrow G$ は、$V_1\cap E^k$ から G^k の単位元 e の近傍 $\tilde{V}^k_e$ の上へ

の homeomorphism に拡張される。但し k は任意の N(d) の元である。
更に、$\tilde{V}^{k}_{1,e} = \tilde{V}^{d}_{1,e} \cap G^{k}$ が成立。

(G,2) 各 G^k は C^∞ Hilbert manifold であり、かつ topological group である。

(G,3) $G^{k+1} \subset G^k$ であり、inclusion map は C^∞ 写像である。

(G,4) $G = \bigcap G^k$ であり、位相は $\{G^k\}$ からの inverse limit topology である。しかも G は各 G^k の中で dense である。

(G,5) 群演算 $(g,h) \rightsquigarrow gh$ は、$G^{k+l} \times G^k$ から G^k への C^l 級写像となる。

(G,6) 任意の $g \in G^k$ に対して right translation $R_g : G^k \mapsto G^k$ は C^∞ 写像である。

(G,7) 群演算 $g \rightsquigarrow g^{-1}$ は G^{k+l} から G^k への C^l 写像となる。

(G,8) $dR : T_{G^{k+l}} \times G^k \longrightarrow T_{G^k}$ を $dR(v,g) = (dR_g)(v)$ と定義すると、これが C^l 級写像である。但し、T_{G^k} 等は、G^k 等の接バンドルを表す。

§3 接触変換群.

M は閉 C^∞ 多様体で奇数次元であり、C^∞ contact 1-form ω を持っているものとする。

T_M は M の接バンドルとし、$\Gamma(T_M)$ で C^∞ vector field 全体とする。$\Gamma(T_M)$ の元 u, v に内積 $\langle u, v \rangle_k$ を、

$$\langle u, v\rangle_k = \int_M \sum_{s=0}^{k} \langle \nabla^s u, \nabla^s v\rangle \, dV$$

で入れて、それよりきまる norm で $\Gamma(T_M)$ を完備化したものを $\Gamma^k(T_M)$ と書く。又、C^∞ 函数の全体 $\Gamma(1_M)$ に対しても、上と同様にして $\Gamma^k(1_M)$ を定義しておく。

(7)で定義される群 $\mathfrak{D}_\omega$ は次式で与えられる。(これを接触変換群という。)

$$\mathfrak{D}_\omega = \{\varphi \in \mathfrak{D} \,;\ \varphi^*\omega = \tau\omega,\ \tau \text{は} C^\infty \text{函数}\}。$$

(8)で定義される群 $\mathfrak{D}_{s\omega}$ は次式で与えられる。(これを、強意接触変換群と呼んでおこう。)

$$\mathfrak{D}_{s,\omega} = \{\varphi \in \mathfrak{D} \,;\ \varphi^*\omega = \omega\}。$$

それぞれに対応する無限小変換の全体 $\mathfrak{g}_\omega$, $\mathfrak{g}_{s\omega}$ (これ等を、$\mathfrak{D}_\omega$, $\mathfrak{D}_{s\omega}$ の Lie 環と呼ぶ) は次式で与えられる。

$$\mathfrak{g}_\omega = \{u \in \Gamma(T_M) \,;\ d(\omega \lrcorner u) + d\omega \lrcorner u = h\omega,\ h \text{は} C^\infty \text{函数}\},$$

$$\mathfrak{g}_{s\omega} = \{u \in \Gamma(T_M) \,;\ d(\omega \lrcorner u) + d\omega \lrcorner u = 0\}。$$

$\mathfrak{D}_\omega$, $\mathfrak{g}_\omega$ の定義には、τ とか h とかいう函数が入っていて、一寸取扱いが面倒だから、以下に述べるような工夫をしておく。

$\Gamma_*(1_M)$ を positive 又は negative definite な C^∞ 函数の全体とする。又、$\Gamma_*^k(1_M)$ は、$f \in \Gamma^k(1_M)$ でかつ、positive 又は negative definite な函数の全体とする。Sobolev の補題があるから、$\Gamma_*^k(1_M)$ は、$k \geq [\frac{1}{2}\dim M]+1$ で定義でき、かつ、$\Gamma^k(1_M)$ の開集合である。

$\Gamma_*(1_M)*\mathcal{D}$ は、直積 $\Gamma_*(1_M)\times\mathcal{D}$ に群演算 $(f,\varphi)*(g,\psi)=((\psi^*f)\cdot g,\varphi\psi)$ を入れたものとする。但し、$(\psi^*f)(x)=f(\psi(x))$ である。

$n=\dim M$ として、先ず次の事実がある。

$\boxed{\text{定理}}$ (イ) $\mathcal{D}$ は、I.L.H.-system $\{\Gamma(T_M),\Gamma^k(T_M),k\in N(n+5)\}$ をモデルとする I.L.H.-Lie 群である。

(ロ) $\Gamma_*(1_M)*\mathcal{D}$ は I.L.H.-system $\{\Gamma(1_M)\oplus\Gamma(T_M),\Gamma^k(1_M)\oplus\Gamma^k(T_M),k\in N(n+5)\}$ をモデルとする I.L.H.-Lie 群である。

(ハ) $\Gamma(1_M)\oplus\Gamma(T_M)$ には自然に Lie 環の構造が入る。Lie bracket は、

$[(f,u),(h,v)]=(uh-vf,[u,v])$ で与えられる。

このことを頭において $\mathfrak{g}_\omega$ を次のように定義しなおす。

$\mathfrak{g}_\omega=\{(f,u)\in\Gamma(1_M)\oplus\Gamma(T_M);\ f\omega+d(\omega\lrcorner u)+d\omega\lrcorner u=0\}$.

更に、$\mathcal{D}_\omega$ を $\{(\tau,\varphi)\in\Gamma_*(1_M)*\mathcal{D};\ \tau\varphi^*\omega=\omega\}$ と定義しなおす。

$\mathfrak{g}^k_\omega$ を $\mathfrak{g}_\omega$ の $\Gamma^k(1_M)\oplus\Gamma^k(T_M)$ に於ける closure とする。

$\boxed{\text{定理}}$ $\mathcal{D}_\omega$ は I.L.H.-system $\{\mathfrak{g}_\omega,\mathfrak{g}^k_\omega,k\in N(n+7)\}$ をモデルとする I.L.H.-Lie 群である。更に、$\Gamma_*(1_M)*\mathcal{D}$ を $\{\Gamma(1_M)\oplus\Gamma(T_M),\Gamma^k(1_M)\oplus\Gamma^k(T_M),$ $k\in N(n+7)\}$ をモデルとする I.L.H.-Lie 群と考えれば、$\mathcal{D}_\omega$ は、それの閉 I.L.H. 部分群である。

π を $\Gamma_*(1_M)*\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}$ への射影とすれば、これは群の準同型であり、自然に $\Gamma^k_*(1_M)*\mathcal{D}^k$ から $\mathcal{D}^k$ への射影に拡張される。

π を $\mathcal{D}_\omega$ に制限したものは kernel を持たないから、$\mathcal{D}_\omega$ は自然に $\mathcal{D}$ の中に入っていると思うことができるのだが、実は、$\mathcal{D}_\omega$ は $\mathcal{D}$ の I.L.H. 部分群ではない。その事情を説明しよう。

$\pi: \mathcal{D}_\omega \mapsto \mathcal{D}$ は、各 $k \in N(n+7)$ に対して $\mathcal{D}^k_\omega$ から $\mathcal{D}^k$ への C^∞ 級の写像に拡張され、それは 1:1 であり、homeomorphism であるのだが、$\mathcal{D}_\omega$ が $\mathcal{D}$ の I.L.H. 部分群と呼べる為には、$(d\pi)_e \mathfrak{g}^k_\omega$ が $\Gamma^k(T_M)$ の中で閉集合であることが当然要求される。(I.L.H. 部分群の定義を書いていないのでこの点不明確だが、有限次元多様体の部分多様体の定義と同様に定義してある。) しかし、実際には $(d\pi)_e \mathfrak{g}^k_\omega$ は $\Gamma^k(T_M)$ の中で closed subspace にならないのである。その理由を略記すれば次の如くなる。

ω に対して characteristic vector field ξ_ω を $\omega \lrcorner \xi_\omega = 1$, $d\omega \lrcorner \xi_\omega = 0$ で定義する。E_ω を $\omega = 0$ で定義される T_M の subbundle, E^*_ω を $\xi_\omega = 0$ で定義される T^*_M の subbundle とする。$T_M = R\xi_\omega \oplus E_\omega$, $T^*_M = R\omega \oplus E^*_\omega$ である。$\Gamma(E_\omega)$ は E_ω の C^∞ section の全体とし、それに前と同様にして内積を作り、更に $\Gamma^k(E_\omega)$ を作る。$\mathfrak{g}^k_\omega$ は、$\Gamma^k(1_M) \oplus \Gamma^k(1_M)\xi_\omega \oplus \Gamma^k(E_\omega)$ の subspace だが、実は、

$$\mathfrak{g}^k_\omega = \{(h, f\xi_\omega + u) \in \Gamma^k(1_M) \oplus \Gamma^{k+1}(1_M)\xi_\omega \oplus \Gamma^k(E_\omega);\ h = -df \lrcorner \xi_\omega \\ u = -d\omega^{-1}(df - (df \lrcorner \xi_\omega)\omega)\}$$

である。(f は任意だから、これは $\mathfrak{g}^k_\omega$ と $\Gamma^{k+1}(1_M)$ が 1:1 に対応していることを示している。)

一方 $(d\pi)_e$ は第一成分を消す写像だから．

$(d\pi)_e \mathfrak{g}_\omega^k = \{ f\xi_\omega + u \in \Gamma^{k+1}(1_M) \oplus \Gamma^k(E_\omega) \;;\; u = -d\omega^{-1}(df - (df \lrcorner \xi_\omega)\omega) \}$

である。これの．$\Gamma^k(T_M) = \Gamma^k(1_M)\xi_\omega \oplus \Gamma^k(E_\omega)$ での closure を考える。若しそれが $(d\pi)_e \mathfrak{g}_\omega^k$ と一致しているならば．$df - (df \lrcorner \xi_\omega)\omega \in \Gamma^k(E_\omega^*)$ という事から．$df \in \Gamma^k(1_M)$ 従って $f \in \Gamma^{k+1}(1_M)$ が結論されなければならぬ筈である。ところが $\Gamma^k(1_M)$ のえで．$df - (df \lrcorner \xi_\omega)\omega$ が $\Gamma^k(E_\omega^*)$ に入るものは存在する。(局所座標をとって局所的に考えても存在する。) 従って．$(d\pi)_e \mathfrak{g}_\omega^k$ は $\Gamma^k(T_M)$ の中で閉集合ではないのである。この事情が．序で述べた予想を考える時の困難の一つである。

§4 強意接触変換群．

強意接触変換群は．一般には I.L.H. Lie 群にはならないと思われる。$\mathfrak{g}_{s\omega}$ は．次の式で与えられる。

$\mathfrak{g}_{s\omega} = \{ f\xi_\omega + u \in \Gamma(1_M)\xi_\omega \oplus \Gamma(E_\omega) \;;\; df \lrcorner \xi_\omega = 0,\; u = -d\omega^{-1} df \}$.

従って．$\mathfrak{g}_\omega$ のときとは違って．f は任意函数ではなく．ξ_ω の積分曲線上で一定の函数である。従って．ξ_ω の積分曲線が複雑だと．$\mathcal{D}_{s\omega}$ の方もかなり複雑になる筈である。そこで．ここでは．characteristic vector field ξ_ω が S^1 の free action を引起すと仮定する。奇数次元の球面に入る自然な contact 構造等は．この性質を持っている。ξ_ω で生成される one parameter group を Ξ_t と

する。仮定から orbit space N は閉多様体であり，M は N 上の S^1 bundle である。M から N への射影を p とする。

$\mathfrak{g}_{s\omega}^k$ を $\mathfrak{g}_{s\omega}$ の $\Gamma^k(T_M)=\Gamma^k(1_M)\xi_\omega\oplus\Gamma^k(E_\omega)$ 内での closure とする。簡単に，$\mathfrak{g}_{s\omega}^k=\{f\xi_\omega-d\omega^{-1}df\ ;\ f\in p^*\Gamma^{k+1}(1_N)\}$ がわかる。$\mathcal{D}_{s\omega}$，$\mathcal{D}_{s\omega}^k$ は $\mathcal{D}_\omega$，$\mathcal{D}_\omega^k$ の部分群として，$\mathcal{D}_{s\omega}=\{(\tau,\varphi)\in\mathcal{D}_\omega\ ;\ \tau=1\}$，$\mathcal{D}_{s\omega}^k=\{(\tau,\varphi)\in\mathcal{D}_\omega^k\ ;\ \tau=1\}$ で定義しておく。

定理 Characteristic vector field ξ_ω が S^1 の free action を引起すならば，$\mathcal{D}_\omega$ の中に，$\mathfrak{g}_{s\omega}$ を Lie 環に持つ連結な I.L.H. 部分群 $\mathcal{D}_{s\omega}'$ が存在する。しかも，$\mathcal{D}_{s\omega}'\subset\mathcal{D}_{s\omega}$，$\mathcal{D}_{s\omega}'^k\subset\mathcal{D}_{s\omega}^k$ である。但し，$\mathcal{D}_{s\omega}'^k$ は I.L.H. Lie 群として，§I の定理による G^k にあたるものである。更に，$\mathcal{D}_\omega^k$ の中の始点を単位元とする C^1-curve が各点で $\mathcal{D}_{s\omega}^k$ に入るならば，その curve は実は $\mathcal{D}_{s\omega}'^k$ に入っている。

ここで，$\mathcal{D}_{s\omega}^k$ はまだ，どんな集合であるかわかっていないことに注目しよう。$\mathcal{D}_{s\omega}^k$ が locally C^1-arcwise connected という事が云えれば $\mathcal{D}_{s\omega}'^k$ は $\mathcal{D}_{s\omega}^k$ の連結成分となるのであるがここでは，まだそれは云えていないのである。

この定理の証明の大筋は，$\mathfrak{g}_{s\omega}^k$ を right translation で $\mathcal{D}_\omega^k$ 上にばらまくと，実は $k\in N(n+7)$ に於ては C^∞ distribution となることを云い。(これは面倒である。) $\mathfrak{g}_{s\omega}$ が Lie 環だから，これが involutive となることを云い。それに対してフロベニウスの定理が成立することを云い，単位元を通る極大積分断面を作るの

である。こうして得られるのが $\mathcal{D}'_{s\omega}$ であって、これについては上の定理までしか云えないのである。

Mが単連結ならばNもそうであるから、この事と、$d\omega$ は、Nの symplectic 2-form となり、$\mathcal{D}_{s\omega}$ の元はNに symplectic diffeom. を引起すことゝ、序文(5)の事実を使うと、実は、$\mathcal{D}^k_{s\omega}$ が locally C^1-arcwise connected であることが得られる。従って、

$\boxed{\text{定理}}$ 前定理の条件に更にMが単連結という事を加えれば、$\mathcal{D}_{s\omega}$ は $\mathcal{D}_\omega$ の閉 I.L.H. 部分群である。しかも、$\mathcal{D}_\omega$ は、$\mathcal{D}_{s\omega}\backslash\mathcal{D}_\omega$ を底空間とし、$\mathcal{D}_{s\omega}$ をファイバーとする fibre bundle である。しかも各、$\mathcal{D}^k_{s\omega}\backslash\mathcal{D}^k_\omega$ は C^∞ Hilbert 多様体である。(実際には、もう少し強く、$\mathcal{D}_{s\omega}\backslash\mathcal{D}_\omega$ は I.L.H.-多様体と呼ぶものになっている。)

§5 商空間 $\mathcal{D}_{s\omega}\backslash\mathcal{D}_\omega$

序文で述べた予想は、$\mathcal{D}_{s\omega}\backslash\mathcal{D}_\omega$ が可縮であれば無論肯定的に解決される。しかし、実際には、この商空間がどんなものかは全く見当がついていない。その難しさの説明にとどめることにする。

$\Gamma_*(1_M)$, $\Gamma^k_*(1_M)$ は §3 で定義したものと同一とする。$\mathcal{D}_\omega$ から $\Gamma_*(1_M)\omega$ への写像 p を $p(\tau,\varphi)=\varphi^*\omega=\tau^{-1}\varphi$ で定義すれば、これは、各 k に対して、$\mathcal{D}^k_\omega$ から $\Gamma^k_*(1_M)\omega$ への C^∞ 写像に拡張で

こる。(但し $k\in N(n+7)$) $p\mathcal{D}^k_\omega$ は ω の $\mathcal{D}^k_\omega$ による orbit と云って良く、従って $\mathcal{D}^k_{s\omega}\backslash\mathcal{D}^k_\omega$ と $p\mathcal{D}^k_\omega$ とは自然に同一視できる。従って、商空間を調べるには、$p\mathcal{D}^k_\omega$ を調べれば良い。

$E^k=\{f\in\Gamma^k(1_M) ; \int_{S^1} f(\Xi_t x)\,dt=0\}$, $\mathbb{E}=\cap E^k$, とすると、

$\Gamma(1_M)=\rho^*\Gamma(1_N)\oplus\mathbb{E}$, $\Gamma^k(1_M)=\rho^*\Gamma^k(1_N)\oplus E^k$ である。

Lemma $(dp)_e\,\mathfrak{g}^k_\omega$ は $E^k\omega$ の中の dense な subset である。従って、$p\mathcal{D}^k_\omega$ は、$\Gamma^k_*(1_M)\omega$ の Hilbert submanifold となり得ない。

証) $\mathcal{D}^k_\omega$, $\Gamma^k_*(1_M)$ は C^∞ Hilbert 多様体、p は C^∞ 写像だから、微分 dp は考えられる。

$(dp)_e\,(-df\lrcorner\xi_\omega,\ f\xi_\omega-d\omega^{-1}(df-(df\lrcorner\xi_\omega)\omega))=(df\lrcorner\xi_\omega)\omega$

であり、$f\in\Gamma^{k+1}(1_M)$ だから $(df\lrcorner\xi_\omega)\omega\in\Gamma^k(1_M)\omega$ であるのだが $\int_{S^1}(df\lrcorner\xi_\omega)(\Xi_t x)\,dt=0$ だから $E^k\omega$ に入っている。しかし、これは $E^k\omega$ 全体とはならない。$g\in E^k$ に対して、$h\in\Gamma^{k+1}(1_M)$ があって、$g=dh\lrcorner\xi_\omega$ となることは一般には結論できない。しかし、$(dp)_e\,\mathfrak{g}^k_\omega$ が E^k の中で dense であることは上の事からすぐに云える。

Lemma $(dp)_{(\tau,\varphi)}T_{(\tau,\varphi)}\mathcal{D}^k_\omega=\{\{df\lrcorner\xi_\omega-\frac{1}{\tau}df\lrcorner\{\tau\}\}\omega,\ f\in\Gamma^{k+1}(1_M)\}$

但し、$\{\tau\}=d\omega^{-1}\{d\tau-(d\tau\lrcorner\xi_\omega)\omega\}$.

この事は、$p\mathcal{D}^k_\omega$ が $\Gamma^k_*(1_M)$ の中の affine space の中に入っているといった都合の良い性質はないことを示しているようである。

$p\mathcal{D}^k_\omega$ の性質は今の所全く不明である。